

Halmazelmélet gyakorlat
2015. március 19.

Az alábbi feladatokban $\mathcal{U}$ nemtriviális ultrafiltert jelöl $\mathbb{N}$ -en.

1. Igazoljuk, hogy
 - (a) minden parciális rendezés $(P, <_P)$ kiterjeszthető egy $(P, <'_P)$ teljes rendezéssé ugyanazon az alaphalmazon!
 - (b) $x <_P y$ pontosan akkor teljesül, ha minden $<'_P$ kiterjesztésre $x <'_P y$!
 - (c) ha P fa, akkor $<_P$ kiterjeszthető jólrendezéssé!
2. Legyen X tetszőleges halmaz és tekintsünk egy $\Psi : \mathcal{P}(X) \rightarrow \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ unió- és komplementertartó ráképezést. Mi lesz $\Psi^{-1}(\{\emptyset\})$?
3. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $A_1, \dots, A_n$ partíciójára $\mathbb{N}$ -nek létezik egyetlen i , hogy $A_i \in \mathcal{U}$.
4. Tekintsük a következő relációt $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ -en: $f \sim g \iff \{n : f(n) = g(n)\} \in \mathcal{U}$. Mutassuk meg, hogy ez egy ekvivalenciareláció! Defináljunk rendezést, összeadást, szorzást az ekvivalenciaosztályok halmazán. Igaz-e, hogy a kapott struktúra izomorf $\mathbb{N}$ -nel?
5. Legyen $F : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ monoton leképezés, azaz $A \subset B$ esetén $F(A) \subset F(B)$. Igazoljuk, hogy valamely S -re $F(S) = S$.
6. Tekintsük a következő játékot: I és II felváltva neveznek meg $0 < n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ természetes számokat. I nyer $\iff [0, n_0) \cup [n_1, n_2) \cup \dots \in \mathcal{U}$. Bizonyítsuk be, hogy egyik játékosnak sincs nyerő stratégiája!
7. Igazoljuk, hogy $\mathbb{N}$ -en megadható 2^c sok különböző ultrafilter!
8. Lássuk be, hogy hozzárendelhető minden korlátos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ valós sorozathoz egy "határérték" valós szám $\lim^* x_n$, amely a konvergens sorozatokhoz a szokásos határértékeket rendeli hozzá, additív és multiplikatív, azaz ha $\lim^*(x_n + y_n) = \lim^* x_n + \lim^* y_n$ és $\lim^*(x_n \cdot y_n) = \lim^* x_n \cdot \lim^* y_n$ valamint $|\lim^* x_n| \leq \sup |x_n|$.
9. (Beadható) Legyenek $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$ nemtriviális ultrafilterek $\mathbb{N}$ -en. Igazoljuk, hogy létezik olyan A halmaz, hogy A és $\mathbb{N} \setminus A$ végtelenek és $A \in \mathcal{U}_1 \cap \dots \cap \mathcal{U}_n$.