

Halmazelmélet Gyakorlat

2012. április 13.

1. Bizonyítsuk be, hogy minden $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ filterhez van ezt tartalmazó $\mathcal{U}$ ultrafilter!
2. Tekintsük a természetes mértéket a 2^ω halmazon. Igazoljuk, hogy egy nemtriviális $\mathcal{U} \subset 2^\omega$ ultrafilter nem lehet mérhető!
3. Adott képviselők H halmaza szavaz 3 jelőltre, úgy hogy midegyikük felállít egy szimpátiasorrendet. Az eredmény egy közös sorrend, a szavazásnak két szabálya van:
 - ha mindenki X -et preferálja Y -nal szemben, akkor ez az eredményben is így van
 - ha az X és Y közti preferenciasorrend senkinél sem változik, akkor az eredményben sincs változás.

Ha H végtelen, igazoljuk, hogy van olyan szabály, ami nem a diktatúra. Lássuk be, hogy ez végesre már nem teljesül!

4. Legyen $E \subset \mathbb{R}^2$ ekvivalenciareláció. Egy $T \subset \mathbb{R}$ halmaz *transzverzális*, ha minden E_a ekvivalenciaosztályra $|E_a \cap T| = 1$. Bizonyítsuk be, hogy minden $E \subset \mathbb{R}^2$ zárt ekvivalenciarelációnak van F_σ transzverzálisa! Mi a helyzet nyílt E -kel?
5. Mutassunk példát olyan $E \subset \mathbb{R}^2$ F_σ ekvivalenciarelációra, melynek nincs Lebesgue-mérhető transzverzálisa!
6. Van-e az egészek halmazán eltolás invariáns $0 - 1$ értékű mérték?