

Halmazelmélet Gyakorlat
2013. április 10.

1. Igazoljuk, hogy minden κ végtelen számosságú halmazon van ultrafilter!
2. Tegyük fel, hogy $\mathcal{U}$ egy Ramsey ultrafilter $\mathbb{N}$ -en. Ekkor tetszőleges $0 < n_0 < n_1 < \dots$ sorozatra létezik olyan $A \in \mathcal{U}$, hogy minden i -re

$$|A \cap [n_i, n_{i+1})| = 1.$$

3. Legyen $\mathcal{U}$ Ramsey ultrafilter. Igazoljuk, hogy minden $a_n \rightarrow 0$ sorozatra és $\varepsilon > 0$ -ra létezik olyan $A \in \mathcal{U}$, hogy

$$\sum_{n \in A} a_n < \varepsilon.$$

4. Lehet-e egy $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}$ Hamel bázis sűrű?
5. Tartalmazhat-e egy Hamel bázis prefekt halmazt?
6. Legyen $(M, \in)$ egy ZFC modell. Létezik-e M -nek nemtriviális automorfizmus?
7. Bizonyítsuk be (természetesen AC nélkül), hogy ha minden $G(A, X)$ típusú játékban valamelyik játékosnak van nyerő stratégiája akkor egy tetszőleges A_n megszámlálható halmazrendszeren van kiválasztási függvény!
8. Legyen $\{\phi_i : i \in \mathbb{N}\}$ gráfelméleti formulák halmaza, úgy, hogy bármely véges részhalmazához van olyan gráf amelyre azok a formulák igazak. Igazoljuk, hogy ekkor van olyan gráf, amelyre mindegyik igaz!