

Halmazelmélet gyakorlat

2015. március 26.

1. Adott 13 súly úgy, hogy bármely 12 felbontható két azonos összsúlyú hatosra. Igaz-e, hogy ekkor mindegyik egyenlő súlyú, ha minden súly racionális szám? Mi a helyzet tetszőleges valós súlyok esetén?

2. Adjuk meg azon α rendszámokat, amelyek megoldják az alábbi egyenletet:

(a) $\alpha + 1 = 1 + \alpha$

(c) $\alpha \cdot \omega = \omega \cdot \alpha$

(b) $\alpha + \omega = \omega + \alpha$

(d) $\alpha \cdot (\omega + 1) = (\omega + 1) \cdot \alpha$

3. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ultrafilter és $a_n \rightarrow 0$ sorozat, hogy minden $A \in \mathcal{U}$ -ra

$$\sum_{n \in A} a_n = \infty.$$

4. Legyen $(A, <)$ jólrendezett, X pedig tetszőleges halmaz, valamint $L = \{f : f \text{ az } A \text{ halmaz egy kezdőszeletéről } X\text{-be képez}\}$ és $F : L \rightarrow X$ leképezés. Igazoljuk, hogy létezik olyan $f : A \rightarrow X$, hogy minden $a \in A$ -ra $F(f|_{\{b \in A : b < a\}}) = f(a)$.

5. Képviselők H halmaza állít fel preferenciasorrendet 3 jelölt között. Az eredmény egy közös sorrend. Tegyük fel, hogy a választási rendszer kielégíti az alábbi feltételeket:

- (a) ha mindenki ugyanazt a sorrendet határozza meg, akkor az eredmény is ez

- (b) ha a képviselők úgy változtatják meg a sorrendet, hogy az X és Y közti sorrendet senkinél sem változik, akkor az az eredményben sem változik

Igazoljuk, hogy ha H véges akkor egyetlen ilyen választási rendszer van! Bizonyítsuk be, hogy végtelen H -ra ez már nem igaz!

6. Egy nemtriviális $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tekinthető végtelen 0-1 sorozatok egy halmazának, így természetesen azonosítható (a 2-es számrendszerbeli felírás segítségével) a $[0, 1]$ intervallum egy $\mathcal{U}'$ részhalmazával. Bizonyítsuk be, hogy ez a részhalmaz nem mérhető, valamint azt is, hogy nem Baire tulajdonságú (azaz nincs olyan $V \subset \mathbb{R}$ nyílt, melyre $\mathcal{U}' \triangle V$ első kategóriájú)!

7. (Beadható) Mely α rendszámokra teljesül $\alpha + (\omega + 1) = (\omega + 1) + \alpha$?