

Halmazelmélet gyakorlat

2015. április 9.

1. Létezik-e olyan $H \subset \mathbb{R}^2$ halmaz, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ -re $|H_x| < \mathfrak{c}$ és minden $y \in \mathbb{R}$ -re $|\mathbb{R} \setminus H^y| < \mathfrak{c}$?
2. Lássuk be, hogy létezik olyan $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyet minden egyenesre megszorítva a kapott (egyváltozós) függvénynek épp 5 szakadási pontja van!
3. Létezik-e olyan $A \subset \mathbb{R}$, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ -hez létezik pontosan egy $a, b \in A$ pár, melyre $x = a + b$?
4. (a) Igazoljuk, hogy van olyan megszámlálható rendszám, amely nem polinomja ω -nak, azaz nem $\omega^n c_n + \dots + \omega c_1 + c_0$ alakú, ahol $n, c_0, \dots, c_n \in \omega$.
(b) Akkor hol a hiba: Transzfinit rekurzióval bizonyítjuk, hogy minden megszámlálható rendszám ω polinomja. Ha α -ra $\alpha = \omega^n c_n + \dots + \omega c_1 + c_0$, akkor $\alpha + 1 = \omega^n c_n + \dots + \omega c_1 + c_0 + 1$, ami az asszociativitás miatt még mindig polinom.
5. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $H \subset \mathbb{R}$ halmaz, hogy sem H sem $\mathbb{R} \setminus H$ nem tartalmaz perfekt halmazt!
6. Adjunk szükséges és elégséges feltételt egy (nem feltétlenül véges) gráf
(a) térberajzolhatóságára
(b) térberajzolhatóságára, úgy, hogy az élek végpontjait kivéve diszjunkt szakaszok
(c) síkbarajzolhatóságára!
7. Lefedhető-e a sík diszjunkt körvonalak uniójával? És a tér?
8. Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}$ felbontható $\mathfrak{c}$ sok második kategóriájú (azaz megszámlálható sok sehol sem sűrű uniójával nem fedhető) halmaz diszjunkt uniójára!
9. Mutassuk meg, hogy nem létezik $\mathbb{R}$ zárt részhalmazainak szigorúan csökkenő $\{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ sorozata, ahol ω_1 az első nem megszámlálható rendszám!
10. (Beadható) Konstruáljunk olyan $H \subset \mathbb{R}^2$ halmazt, amely minden kört 3 pontban metsz!