

Halmazelmélet Gyakorlat

2012. április 27.

1. Igazoljuk, hogy CH ekvivalens azzal, hogy $R^2 = A \cup B$, ahol A minden vízszintes B pedig minden függőleges egyenest megszámlálható sok pontban metsz!
2. Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}$ előáll $\mathfrak{c}$ sok diszjunkt halmaz uniójaként, melyek mindegyike minden perfektet metsz!
3. Legyen $S \subset \mathbb{R}$, jelölje S' S torlódási pontjainak halmazát!. Legyen $\alpha < \omega_1$ -re
 - $S_\alpha = S$, ha $\alpha = 0$
 - $S_\alpha = S'_{\alpha-1}$, ha α rákövetkező
 - $S_\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} S_\beta$, ha α limesz

Igazoljuk, hogy minden S -re létezik egy $\alpha_S < \omega_1$ rendszám, hogy $S'_{\alpha_S} = S'_{\alpha_S+1}$! Milyen $\alpha < \omega_1$ -re létezik olyan S zárt, melyre éppen α a minimális ilyen rendszám?

4. Igazoljuk, hogy minden $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény előáll két bijektív függvény összegeként!
5. Bizonyítsuk be, hogy minden $A \subset \mathbb{R}$ -re létezik olyan $f : A \rightarrow A$ függvény, hogy $f(a) < a$ legfeljebb egy kivétellel teljesül!
6. Lássuk be, hogy létezik olyan $A \subset \mathbb{R}$ halmaz, melyre minden $x \in \mathbb{R}$ egyértelműen áll elő $x = a + b$ alakban, ahol $a, b \in A$!
7. Egy $C \subset \mathbb{R}^2$ halmaz kör, ha létezik P pont, hogy minden P -ből induló félegyenes pontosan egy pontban metszi C -t. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^2$ lefedhető megszámlálható sok körrel!
8. **Definíció.** Legyen $(P, \leq)$ kényszerképzet, ekkor P MAF-os, ha minden $A \subset P$ nem megszámlálható részhalmazban van olyan $p, q \in A$ és $r \in P$, hogy $r \leq p, q$.
Martin-axiómája ($MA(\kappa)$). Ha P egy MAF-os kényszerképzet, $\{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$ pedig sűrű halmazok egy rendszere, akkor van olyan $\mathcal{F} \subset P$ filter amely mindegyiket metszi.
Mikor teljesül $MA(\aleph_0)$?
9. Igaz-e $MA(\mathfrak{c})$?
10. $MA(\aleph_1)$ mellett lássuk be, hogy $\aleph_1$ sok nullmértékű halmaz uniója nullmértékű!
11. $MA(\aleph_1)$ Legyen $\{f_\alpha : \omega \rightarrow \omega\}$ függvények egy tetszőleges $\aleph_1$ számosságú halmaza. Igazoljuk, hogy van olyan $g : \omega \rightarrow \omega$ függvény, hogy $(\forall f_\alpha)(\exists n)(\forall m \geq n)(f_\alpha(m) < g(m))$, vagyis g mindegyiket dominálja.