

Halmazelmélet Gyakorlat
2013. április 24.

1. Mutassunk példát egy $\aleph_1$ számosságú gráf két színnel való színezésére, hogy egyik színben nincs $\aleph_1$ -es homogén!
2. Igazoljuk, hogy (CH) ekvivalens egy olyan $A \subset \mathbb{R}^2$ halmaz létezésével, melynek minden függőleges szekciója megszámlálható, és minden vízszintes szekciója ko-megszámlálható!
3. Egy $T \subset \omega^{<\omega}$ fát jófundáltnak nevezünk, ha nincs végtelen ága. Legyen $T' \subset T$ azon T -beli pontok halmaza, melyek nem levelek. Most indukcióval legyen

- $T^0 = T$,
- $T^{\alpha+1} = (T^\alpha)'$,
- $T^\beta = \bigcap_{\alpha < \beta} T^\alpha$, ha β limeszrendszám.

Igazoljuk, hogy bármely T jófundáltra létezik olyan $\alpha < \omega_1$, hogy $T^\alpha = \emptyset$. Minden $\alpha < \omega_1$ -re mutassunk olyan T fát, melyre épp α a minimális ilyen!

4. Egy $f : \omega_1 \rightarrow \omega_1$ függvényt regresszívnek nevezünk, ha minden $0 \neq \alpha < \omega_1$ -re $f(\alpha) < \alpha$. Igazoljuk, hogy regresszív függvény ω_1 -es halmazon konstans!
5. Bizonyítsuk be, hogy egy teljes $\aleph_1$ -es gráf éleit két színnel színezve vagy van egy piros színű $\aleph_1$ -es vagy van egy zöld színű $\aleph_0$ -s teljes részgráf!
6. Legyen $A, B \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ monoton növekvő függvényekből. (A, B) -t (κ, λ) -résnek nevezzük, ha minden $f \in A$, $g \in B$ -re $f <^* g$ és nem létezik olyan h , hogy $(\forall f \in A)(\forall g \in B)(f <^* h <^* g)$, valamint $|A| = \kappa$ és $|B| = \lambda$.
 - (a) Lássuk be, hogy nincs $(\aleph_0, \aleph_0)$ -rés!
 - (b) * Lássuk be, hogy $(\aleph_1, \aleph_1)$ -rés már létezik!
7. (CH) Bizonyítsuk be, hogy létezik egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bijekció, melyre minden $A \subset \mathbb{R}$ -re A első kategóriájú $\iff f(A)$ nullmértékű!