

Halmazelmélet gyakorlat

2015. április 16.

1. Igazoljuk, hogy létezik olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amely semmilyen nem megszámlálható zárt halmazra megszorítva sem folytonos!
2. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^3$ felbontható egységsugarú körvonalak uniójára!
3. Lássuk be, hogy létezik olyan $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy minden folytonos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre az $F + f$ függvény minden intervallumon minden értéket felvesz!
4. Bizonyítsuk be, hogy egy $\mathfrak{c}$ számosságú teljes gráf élei színezhetőek két színnel úgy, hogy ne létezzen nem megszámlálható homogén részgráf!
5. Legyen $\mathcal{U}$ *Ramsey-ultrafilter*. Igazoljuk, hogy minden
 - (a) $0 < n_1 < n_2 < \dots$ sorozatra létezik $A \in \mathcal{U}$, hogy minden i -re $|[n_i, n_{i+1}) \cap A| \leq 1$,
 - (b) $a_n \rightarrow 0$ sorozatra és $\varepsilon > 0$ -ra létezik olyan $A \in \mathcal{U}$, hogy

$$\sum_{n \in A} a_n < \varepsilon.$$

6. Egy $f : \omega_1 \rightarrow \omega_1$ függvényt *regresszívnek* hívunk, ha minden $0 < \alpha < \omega_1$ -re $f(\alpha) < \alpha$. Bizonyítsuk be, hogy egy regresszív függvény egy nem megszámlálható halmazon konstans!
7. (Beadható) Mutassuk meg, hogy minden $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény előáll, mint két injektív függvény összege!