

Matematika alapjai 2 feladatok

2015. szeptember 16.

1. Bizonyítsuk be, hogy $\{\rightarrow, \neg\}$ teljes rendszer!
2. Írjunk fel olyan formulát
 - (a) a gráfelmélet nyelvén, melyet csak egy teljes négyszög teljesít;
 - (b) a csoportelmélet nyelvén, melyet csak nem Abel csoportok teljesítenek;
 - (c) a halmazelmélet nyelvén, melynek jelentése, hogy "létezik üres halmaz és az egyértelmű";
3. Melyik teljesül az alábbiak közül?
 - (a) $\mathbb{R} \models (\exists x)(x^2 + 1 = 0)$
 - (b) $\mathbb{C} \models (\exists x)(x^2 + 1 = 0)$
 - (c) $\mathbb{R} \models (\exists x)(\forall y)(y < x)$
 - (d) $\mathbb{R} \models (\forall y)(\exists x)(y < x)$
 - (e) $\mathbb{K}_n \models (\exists y)(\forall x)((x \neq y) \wedge \neg E(x, y)) \rightarrow E(y, x)$
4. Tegyük fel, hogy egy (V, E) gráf teljesíti az alábbi tulajdonságot: minden $A, B \subset V$ diszjunkt végesre létezik olyan $v \in G$, hogy minden $w \in A$ -ra $E(v, w)$ és minden $z \in B$ -re $\neg E(v, z)$.
 - (a) Lássuk be, hogy egy ilyen gráf szükségképp végtelen!
 - (b) Igazoljuk, hogy egy, ezt a tulajdonságot teljesítő gráf minden megszámlálhatóan végtelen gráfot tartalmaz!
 - (c) Adjunk példát ilyen gráfra!
5. Lássuk be, hogy $\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$ következtetési szabály teljesül (használva a már ismert állításokat)!
6. Írjuk fel az alábbi állításokat a rendezett halmazok nyelvén:
 - nincsenek szomszédos elemek;
 - nincs legnagyobb vagy legkisebb elem;

Mutassuk meg, hogy egy megszámlálhatóan végtelen rendezett halmaz pontosan akkor állítható rendezéstartó bijekcióba a $(\mathbb{Q}, <)$ -bel, ha teljesíti a fenti tulajdonságokat!