

Matematika alapjai 2 feladatok

2015. szeptember 30.

1. Adott az $\langle \mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot, \leq \rangle$ struktúra. Írjuk fel, hogy
 - x prímszám,
 - x és y relatív prímek,
 - teljesül az ikerprím-sejtés!
2. Egy robotbolha ugrál az egész számokon, minden lépésben követve programját. A programja egy olyan algoritmus, melynek megadva a lépés számát, kimenetként egy egész számot kapunk, ez a bolha annyiadik ugrása. Mi mindegyik lépés után egy tetszőleges egész számra csaphatunk le.
 - Írhatunk-e programot a bolha elkapására?
 - El tudjuk-e kapni a bolhát?
3. Írható-e olyan program, amely minden programot előbb-utóbb kiír? Miért nem mond ez ellent az előző feladatnak?
4. Igazoljuk, hogy minden megszámlálható $A \subset \mathbb{C}$ halmaz része egy megszámlálható $F \subset \mathbb{C}$ algebrailag zárt testnek!
5. “A hét (hétfő, ..., péntek) egyik napján meglepetés ZH-t ír az évfolyam. A nap reggelén biztosan nem számíttok arra, hogy ZH-t fogtok írni.”-mondta a gyakorlatvezető. Gondoljuk meg, hogy pénteken nem lehet a zh! Gondoljuk meg, hogy ekkor csütörtökön sem, stb.
6. A lovagok és a lókötők szigetén minden lovag két klub közül pontosan az egyiknek tagja, míg a lókötők nem lehetnek tagok. Egy emberrel néhány szót váltva le tudjuk vonni a következtetést, hogy ő az I. klub tagja. Mit mondhatott nekünk?
7. Azt mondjuk, hogy egy ϕ axióma független a Γ elmélettől, ha $\Gamma \not\models \phi$ és $\Gamma \not\models \neg\phi$. Igazoljuk, hogy
 - a csoport-axiómáktól független a kommutativitás!
 - a lineáris rendezések elméletől független a legnagyobb elem létezése!