

Matematika alapjai 2 feladatok

2015. október 14.

1. Írjunk fel tetszőleges nyelven olyan formulát az x, y változókkal, mely tartalmazza a $(\exists x), (\exists y)$ kvantorokat, mégis, mindkét változó szabad!
2. Vezessük le a Peano-axiómákból, hogy
 - (a) minden x -re $0 \cdot x = 0$,
 - (b) minden x -re $S(S(S(x))) \neq x$,
 - (c) $(\forall x)(\forall y)(x + y = y + x)$,
 - (d) minden x -re $x + 1 = S(x)$.
3. Vezessük le az MP, (1)-(3) következtetési szabályokkal, hogy ha $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ akkor $\Gamma \vdash \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$.
4. Vezessük le az elsőrendű levezetési szabályokat használva (MP, GEN, (1)-(5)), hogy $(\forall x)(\forall y)\phi \vdash (\forall y)(\forall x)\phi$.
5. Használva a teljességi tételt lássuk be, hogy Γ elméletre és ϕ, ψ formulákra ha $\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi$ akkor $\Gamma\{\phi\} \vdash \psi$.
6. A kompaktsági és teljességi tételek segítségével bizonyítsuk be, hogy ha egy Γ elméletnek minden n természetes számra van legalább n elemű modellje, akkor van végtelen modellje is!
7. Igazoljuk, hogy nem írható fel egy elsőrendű formulával a gráfelmélet nyelvén az, hogy a gráf véges!