

Valós függvénytan gyakorlat

2015. február 11.

- Adott egy szálloda végtelen sok szobával, természetes számokkal számozva. Mindegyik szoba egy ágyas, és mindegyikben lakik egy vendég. Érkezik *a)* 1 *b)* megszámlálhatóan végtelen sok *c)* megszámlálhatóan végtelen sok busszal, mindegyikben megszámlálhatóan végtelen sok új vendég. Hogyan tudjuk őket elhelyezni?
- Igazoljuk, hogy az alábbi halmazok megszámlálhatóak!
 - megszámlálható sok megszámlálható halmaz egyesítése
 - $\mathbb{N}$ véges részhalmazainak halmaza
 - az olyan végtelen 0 – 1 sorozatok halmaza, melyek egy idő után konstansak
 - $\{A \subset \mathbb{N} : (\exists n)(\forall m \geq n)(m \in A)\}$
 - páronként diszjunkt nyílt intervallumok tetszőleges rendszere
 - egy monoton $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény szakadási pontjainak halmaza
- Egy robotbolha ugrál a sík egész koordinátájú pontjain, minden lépésben követve programját. Mi mindegyik lépés után egy pontra csaphatunk le. Elkaphatjuk-e a bolhát, ha tudjuk, hogy a programja
 - szerint minden lépésben egyet ugrik fel, le, jobbra vagy balra (mindig ugyanabba az irányba)?
 - szerint minden lépésben valahányat ugrik fel, le, jobbra vagy balra (mindig ugyanabba az irányba, ugyanakkorát)?
 - egy egész együtthatós polinom grafikonjának egész pontjai?
 - tetszőleges leprogramozható algoritmus?
- Igazoljuk, hogy nem megszámlálhatóak!
 - a végtelen 0-1 sorozatok halmaza
 - $\mathbb{N}$ tetszőleges részhalmazainak halmaza
 - a folytonos függvények halmaza
 - a transzcendens számok halmaza
- Legyen $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ függvények egy családja, $f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Igaz-e, hogy létezik olyan $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, amely mindegyik f_n -t egy idő után 'túlnövi', azaz $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})(\forall k \geq m)(f_n(k) \leq g(k))$?
- Hány páronként diszjunkt 'T' betű írható a számegyenesre?