

Valós függvénytan gyakorlat

2015. február 18.

1. (Órai feladat) Gondoljuk meg, hogy a Cantor-függvény egy kiegészítő intervallum két végpontján ugyanazt az értéket veszi fel!
2. (Órai feladat) Adott egy $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz és $a, b \in \mathbb{R}^n$ pontok, úgy hogy $a \in A$ és $b \notin A$. Mutassuk meg, hogy létezik olyan pont az $[a, b]$ szakaszon, amelyhez van konvergens A -beli és $\mathbb{R}^n \setminus A$ -beli sorozat is!
3. Konstruáljunk olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt amelynek grafikonja *sűrű*, azaz minden nemüres nyílt halmazt metsz $\mathbb{R}^2$ -ben! Lehet-e egy ilyen függvény folytonos?
4. Konstruáljunk olyan sűrű halmazt $\mathbb{R}^2$ -ben, amelynek semelyik három pontja sincs egy egyenesen!
5. Mutassuk meg, hogy a C Cantor-halmaz *sehol sem sűrű*, azaz minden nemüres U nyílt halmazhoz létezik olyan $V \subset U$, hogy $V \cap C = \emptyset$!
6. Ha $A \subset \mathbb{R}^n$ jelölje A' a $\{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ az } A \text{ halmaz torlódási pontja}\}$ halmazt, továbbá legyen indukcióval $A^{(n+1)} = (A^{(n)})'$.
 - (a) Lássuk be, hogy minden A halmazra A' zárt!
 - (b) Mutassuk meg, hogy ha valamely n -re $A^{(n)} = \emptyset$, akkor A megszámlálható!
 - (c) Adjunk példát minden n -re olyan A zárt halmazra, hogy $A^{(n)} \neq \emptyset$, de $A^{(n+1)} = \emptyset$!
7. Lássuk be, hogy ha $K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_n \supset \dots$ $\mathbb{R}$ -beli nemüres kompakt (=korlátos+zárt) halmazok egy sorozata, akkor $\bigcap_n K_n \neq \emptyset$!
8. Bizonyítsuk be, hogy ha $K, L \subset \mathbb{R}^n$ kompakt halmazok, akkor a $K + L = \{a + b : a \in K, b \in L\}$ halmaz is kompakt! Mutassunk példát olyan K, L zárt halmazokra is melyekre $K + L$ már nem zárt!
9. Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}$ -nek kontinuum sok különböző zárt halmaza van!