

Valós függvénytan gyakorlat

2015. február 25.

1. (Órai feladat) Mutassuk meg, hogy minden zárt és minden nyílt halmaz F_σ !
2. (Órai feladat) Igazoljuk, hogy minden F_σ halmaz vagy megszámlálható vagy kontinuum számosságú!
3. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény és $A \subset \mathbb{R}$ halmaz. Mely állítások igazak, és melyek hamisak az alábbiak közül
 - (a) ha A nyílt, akkor $f^{-1}(A)$ is nyílt
 - (b) ha A zárt, akkor $f^{-1}(A)$ is zárt
 - (c) ha A kompakt, akkor $f^{-1}(A)$ is kompakt
 - (d) ha $A \in F_\sigma$, akkor $f^{-1}(A)$ is F_σ
 - (e) ha A zárt, akkor $f(A)$ is zárt
 - (f) ha A kompakt, akkor $f(A)$ is kompakt
 - (g) ha A nyílt, akkor $f(A) \in F_\sigma$?
4. Legyen $P = \{x \in [0, 1] : x \text{ 2-es számrendszerbeli alakjának páratlanadik jegyei 0-k}\}$.
Igazoljuk, hogy P perfekt!
5. Mutassuk meg, hogy egy $A \subset \mathbb{R}^n$ halmazra az alábbi állítások ekvivalensek:
 - (a) A kompakt (azaz A korlátos és zárt)
 - (b) minden A -beli sorozatnak van A -beli ponthoz tartó részsorozata
 - (c) A minden nyílt halmazokkal való fedéséből kiválasztható véges fedés
6. Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$, az $x \in A$ pontot az A halmaz *kondenzációs pontjának* nevezzük, ha az x pont minden környezete A -t nem megszámlálható sok pontban metszi. Ha $A \subset \mathbb{R}$, az $x \in A$ pontot az A halmaz *kétoldali kondenzációs pontjának* nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$ -ra $A \cap [x, x + \varepsilon)$ és $A \cap (x - \varepsilon, x]$ nem megszámlálhatóak. Bizonyítsuk be, hogy egy
 - (a) $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz megszámlálható kivétellel minden pontja A kondenzációs pontja
 - (b) $A \subset \mathbb{R}$ halmaz megszámlálható kivétellel minden pontja A kétoldali kondenzációs pont!
7. Igazoljuk, hogy megadható kontinuum sok páronként diszjunkt nemüres perfekt halmaz a számegyenesen! (Ötlet: használjuk fel a 4. feladatot)