

Valós függvénytan gyakorlat

2015. március 4.

1. Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}^n$ egy első kategóriájú G_δ halmaza sehol sem sűrű!
2. Mutassuk meg, hogy megszámlálható sok reziduális halmaz metszete is reziduális!
3. Tegyük fel, hogy egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény grafikonja lefedhető megszámlálható sok folytonosan differenciálható függvény grafikonjának uniójával. Mutassuk meg, hogy f folytonosan differenciálható valamely intervallumon!
4. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Az f *oszcillációja* az x pontban legyen

$$\omega(x, f) = \inf_{\varepsilon > 0} \{ \sup \{ |f(y) - f(z)| : y, z \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \} \}.$$

- (a) Bizonyítsuk be, hogy az $A_n = \{x : \omega(x, f) < \frac{1}{n}\}$ halmaz nyílt!
 - (b) Igazoljuk, hogy egy f folytonossági pontjainak halmaza G_δ !
5. Létezik-e olyan függvény amely folytonossági pontjai épp az irracionális számok? És olyan, amelynek a racionális számok?
 6. Legyen $A \subset \mathbb{R}$. I és II a következő játékot játsszák: I mond egy $[a_0, b_0]$ intervallumot, erre II mond egy $[a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$, majd I mond egy $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ intervallumot stb. I nyer, ha $\bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n] \subset A$, egyébként II a győztes.
 - (a) Igazoljuk, hogy, ha A első kategóriájú, akkor II -nek van nyerő stratégiája!
 - (b) Adjunk meg olyan feltételt A -ra, amelyből következik, hogy I -nek van nyerő stratégiája!
 - (c) * Mutassuk meg, hogy ha II -nek van nyerő stratégiája, akkor A első kategóriájú!