

Valós függvénytan gyakorlat

2015. március 11.

1. Mutassunk példát olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre, amely nem folytonos, de minden $c \in \mathbb{R}$ -re az $\{x : f(x) < c\} (= f^{-1}((-\infty, c)))$ halmaz nyílt!
2. (Órai feladat) Igazoljuk, hogy az

$$\{0, a_1 a_2 \cdots : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{k \leq n : a_k = 7\}|}{n} = \frac{1}{10}\}$$

halmaz $F_{\sigma\delta}$.

3. (Órai feladat) Adott folytonos függvények egy sorozata $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Határozzuk meg, hogy milyen típusúak a
 - (a) $\{x : f_n(x) \rightarrow 0\}$
 - (b) $\{x : f_n(x) \rightarrow \infty\}$
 - (c) $\{x : f_n(x) \text{ konvergens} \}$ halmazok!
4. Igazoljuk, hogy az 1. feladatban leírt tulajdonság ekvivalens azzal, hogy minden x -re

$$\limsup_{y \rightarrow x} f(y) \leq f(x).$$

5. Tegyük fel, hogy $f_n \rightarrow g$ pontonként és minden n -re f_n folytonos. Lássuk be, hogy az $\{x : g(x) < c\}$ és a $\{x : g(x) > c\}$ alakú halmazok F_σ -k! Mutassuk meg, hogy minden U nyíltra $f^{-1}(U)$ is F_σ .
6. Előáll-e a Dirichlet-függvény, mint folytonos függvények pontonkénti limesze?

Beadható feladatok a régebbi feladatsorokról

1. Mutassuk meg, hogy egy $A \subset \mathbb{R}^n$ halmazra az alábbi állítások ekvivalensek:
 - (a) A kompakt (azaz A korlátos és zárt)
 - (b) minden A -beli sorozatnak van A -beli ponthoz tartó részsorozata
 - (c) A minden nyílt halmazokkal való fedéséből kiválasztható véges fedés
2. Konstruáljunk olyan sűrű halmazt $\mathbb{R}^2$ -ben, amelynek semelyik három pontja sincs egy egyenesen!
3. Igazoljuk, hogy megadható kontinuum sok páronként diszjunkt nemüres perfekt halmaz a számegyenesen!