

Valós függvénytan gyakorlat

2015. március 18.

1. (Órai feladat) Igazoljuk, hogy $\mathcal{P}(X)$ (algebrai) gyűrű a szimmetrikus differencia, mint összeadás és a metszet, mint szorzás műveletekre nézve!
2. (Órai feladat) Mutassuk meg, hogy $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ akkor és csak akkor halmazgyűrű, ha a fenti gyűrű (algebrai értelemben vett) részgyűrűje!
3. (Órai feladat) Konstruáljunk olyan függvényt, amelyre minden $c > 0$ -ra $\lim_{n \rightarrow \infty} f(cn) = 0$, de nem igaz hogy $x \rightarrow \infty$ esetén $f(x) \rightarrow 0$.
4. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $A_1, \dots, A_n$ halmazokra $x \in A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_n$ pontosan akkor teljesül, ha x az $A_1, \dots, A_n$ halmazok közül páratlan soknak eleme!
5. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{A}$ halmazgyűrűben nincs végtelen sok páronként diszjunkt nemüres halmaz. Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{A}$ -nak csak véges sok eleme van.
6. Legyen $\{I_n : n \in \mathbb{N}^+\}$ a racionális végpontú nyílt intervallumok egy felsorolása és ha $x \in C$ legyen

$$K(x) = \{n \in \mathbb{N}^+ : x \text{ hármas számrendszerbeli } n\text{-edik jegye } 2\}$$

valamint

$$U = \{(x, y) : x \in C, y \in \bigcup_{n \in K(x)} I_n\}.$$

Igazoljuk, hogy minden

- (a) $V \subset \mathbb{R}$ nyíltra létezik x , hogy $\{y : (x, y) \in U\} = V$!
- (b) U egy F_σ halmaz!
- (c) létezik $U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz is ezzel a tulajdonsággal!

Beadható feladatok

4. Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, és $H \in G_{\delta\sigma}$ akkor $f^{-1}(H)$ is $G_{\delta\sigma}$.
5. Legyen $A \subset \mathbb{R}$. I és II a következő játékot játsszák: I mond egy $[a_0, b_0]$ intervallumot, erre II mond egy $[a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$, majd I mond egy $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ intervallumot stb. I nyer, ha $\bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n] \subset A$, egyébként II a győztes. Igazoljuk, hogy, ha A első kategóriájú, akkor II -nek van nyerő stratégiája!