

Valós függvénytan gyakorlat

2015. március 25.

1. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény. Igaz-e, hogy ha minden x pont f lokális szélsőértékhelye, akkor f konstans? Mi a helyzet, ha f folytonos?
2. Mutassunk példát olyan f függvényre, amely nem deriváltfüggvény és olyanra is melynek deriváltja nem folytonos!
3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény minden pontban jobbról vagy balról folytonos, akkor legfeljebb megszámlálhatóan sok szakadási pontja lehet!
4. Mutassunk példát olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton függvényre amelynek épp a racionális számokban van szakadási pontja!
5. Igazoljuk, hogy minden $F \subset \mathbb{R}$ zárt halmazra létezik egy olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelynek épp F pontjaiban van szakadása!
6. Mutassuk meg, hogy ha $A \subset \mathbb{R}$ nem megszámlálható halmaz, akkor van olyan $a \in \mathbb{R}$, hogy $(-\infty, a) \cap A$ és $(a, \infty) \cap A$ is nem megszámlálható!
7. Mutassuk meg, hogy egy $A \subset \mathbb{R}$ halmaz pontosan akkor megszámlálható, ha léteznek $B, C \subset \mathbb{R}^2$ halmazok úgy, hogy $A \times A = B \cup C$ és B minden vízszintes, C minden függőleges szekicója véges!
8. Lássuk be, hogy van olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amely minden $y \in \mathbb{R}$ értéket egy sűrű halmazon vesz fel!
9. Bizonyítsuk be, hogy hogy minden f függvényre legfeljebb megszámlálhatóan sok pont kivételével minden $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban $D_-f(x_0) \leq D^+f(x_0)$ és $D_+f(x_0) \leq D_-f(x_0)$!

Beadható feladatok

6. Mutassunk példát olyan folytonos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre, amely egyetlen intervallumon sem konstans 0, de a 0 értéket egy $\mathfrak{c}$ számosságú halmazon veszi fel!
7. Igazoljuk, hogy egy felülről félig folytonos függvénynek megszámlálhatóan sok szakadási pontja lehet!