

Valós függvénytan gyakorlat

2015. április 22.

1. (Órai feladat) Legyen f a következőképp definiálva: ha $x = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots |_3 \in C$, akkor legyen $f(x) = 0, a_2 a_1 a_4 a_3 \dots |_3$. Lássuk be, hogy
 - (a) f folytonos C -n,
 - (b) f a C egyetlen porcióján sem monoton,
 - (c) ha f -et kiterjesztjük $[0, 1]$ -re úgy, hogy C kiegészítő intervallumain lineáris legyen, akkor f folytonos lesz $[0, 1]$ -en!
2. Igazoljuk, hogy 1-Lipschitz függvények pontonkénti limesze 1-Lipschitz. Mutassunk példát arra, hogy (tetszőleges konstansú) Lipschitz függvények pontonkénti limesze nem feltétlenül Lipschitz!
3. Legyen $H \subset \mathbb{R}$ és $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz függvény. Bizonyítsuk be, hogy
 - (a) f kiterjeszthető $\bar{H}$ -ra Lipschitz függvénné (azaz úgy, hogy a kapott függvény még mindig Lipschitz legyen)
 - (b) ha H zárt, akkor f kiterjeszthető $\mathbb{R}$ -re Lipschitz függvénné!
4. Legyen $\alpha, L \in \mathbb{R}$. Egy $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt (α, L) -Höldernek nevezünk, ha minden $x, y \in H$ -ra teljesül az

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha$$

egyenlőtlenség.

- (a) Lássuk be, hogy ha $0 < \alpha$, akkor minden (α, L) -Hölder függvény folytonos!
 - (b) Melyek az $(2, 1)$ -Hölder függvények?
 - (c) Mutassunk példát olyan $(\frac{1}{2}, 1)$ -Hölder függvényre, amely nem Lipschitz!
5. Igazoljuk, hogy ha egy $H \subset \mathbb{R}$ halmaz F_σ és G_δ , akkor bármely nemüres F zárt halmazra létezik olyan porciója F -nek, amely része H -nak vagy diszjunkt tőle!

Beadható feladatok

10. Mutassuk meg, hogy létezik olyan monoton függvény, amelynek épp a racionális számokban vannak szakadási pontjai!